

No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without written permission from the IB.

Additionally, the license tied with this product prohibits commercial use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, is not permitted and is subject to the IB's prior written consent via a license. More information on how to request a license can be obtained from <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite de l'IB.

De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation commerciale de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, n'est pas autorisée et est soumise au consentement écrit préalable de l'IB par l'intermédiaire d'une licence. Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour demander une licence, rendez-vous à l'adresse suivante : <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin que medie la autorización escrita del IB.

Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso con fines comerciales de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales— no está permitido y estará sujeto al otorgamiento previo de una licencia escrita por parte del IB. En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una licencia: <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

**Matemáticas**  
**Nivel Superior**  
**Prueba 1**

Martes 3 de noviembre de 2020 (tarde)

Número de convocatoria del alumno

2 horas

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

**Instrucciones para los alumnos**

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba no se permite el uso de ninguna calculadora.
- Sección A: conteste todas las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto.
- Sección B: conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Escriba su número de convocatoria en la parte delantera del cuadernillo de respuestas, y adjúntelo a este cuestionario de examen y a su portada utilizando los cordeles provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Matemáticas NS y de Ampliación de Matemáticas NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[100 puntos]**.



No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

### Sección A

Conteste **todas** las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.

1. [Puntuación máxima: 4]

La variable aleatoria discreta  $X$  tiene la distribución de probabilidad que se muestra en la siguiente tabla.

$x$	0	1	2	3
$P(X=x)$	$p$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$q$

Sabiendo que  $E(X) = \frac{19}{12}$ , determine el valor de  $p$  y el valor de  $q$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

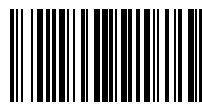
.....

.....

.....

.....

.....



16EP02

2. [Puntuación máxima: 5]

Halle la ecuación de la tangente a la curva  $y = e^{2x} - 3x$  en el punto donde  $x = 0$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



16EP03

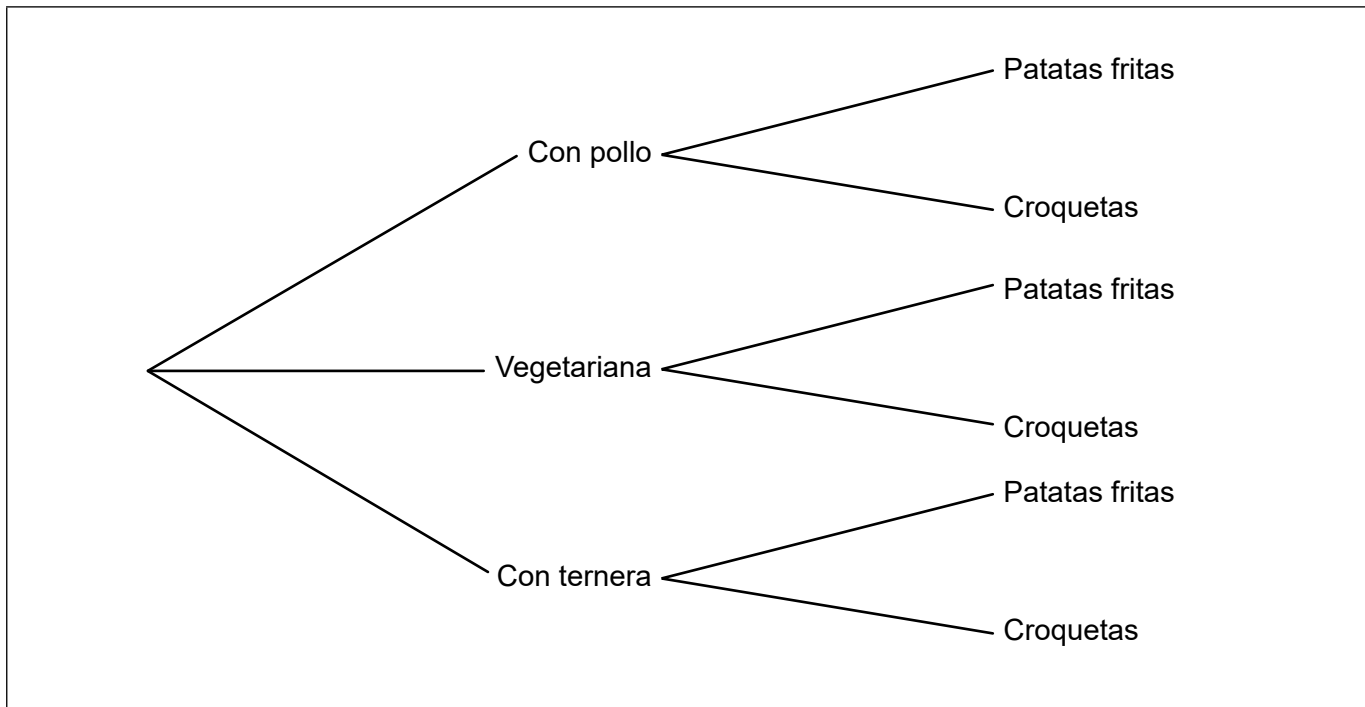
Véase al dorso

3. [Puntuación máxima: 7]

En la cafetería Nusaybah se pueden pedir tres tipos de tortilla: con pollo, vegetariana y con ternera. Cada tortilla se sirve con una ración de patatas fritas o de croquetas. Se sabe que un 20% de los clientes eligen la tortilla con pollo, un 70% eligen la tortilla vegetariana y un 10% eligen la tortilla con ternera.

Se sabe también que el 65% de los que piden una tortilla con pollo, el 70% de los que piden una tortilla vegetariana y el 60% de los que piden una tortilla con ternera escogen las patatas fritas.

El siguiente diagrama de árbol resume los pedidos de los clientes.



- (a) Complete el diagrama de árbol añadiendo a cada rama las respectivas probabilidades. [2]
- (b) Halle la probabilidad de que un cliente elegido al azar haya pedido patatas fritas. [2]
- (c) Halle la probabilidad de que un cliente elegido al azar haya pedido patatas fritas, sabiendo que **no** pidió una tortilla con pollo. [3]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



16EP04

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



16EP05

Véase al dorso

4. [Puntuación máxima: 5]

Considere la ecuación  $\frac{2z}{3-z^*} = i$ , donde  $z = x + iy$ , con  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Halle el valor de  $x$  y el valor de  $y$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



5. [Puntuación máxima: 5]

El primer término de una progresión aritmética es 4 y el quinto término es  $\log_2 625$ .

Halle la diferencia de la progresión. Exprese la respuesta en la forma  $\log_2 p$ , donde  $p \in \mathbb{Q}$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



16EP07

Véase al dorso



6. [Puntuación máxima: 4]

Considere la ecuación  $ax^2 + bx + c = 0$ , donde  $a \neq 0$ . Sabiendo que las raíces de esta ecuación son  $x = \sin \theta$  y  $x = \cos \theta$ , muestre que  $b^2 = a^2 + 2ac$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



16EP08

7. [Puntuación máxima: 5]

Considere los números complejos  $z_1 = \cos \frac{11\pi}{12} + i \operatorname{sen} \frac{11\pi}{12}$  y  $z_2 = \cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}$ .

(a) (i) Halle  $\frac{z_1}{z_2}$ .

(ii) Halle  $\frac{z_2}{z_1}$ . [3]

(b)  $0$ ,  $\frac{z_1}{z_2}$  y  $\frac{z_2}{z_1}$  están representados por los puntos O, A y B, respectivamente,

en un diagrama de Argand. Determine el área del triángulo OAB. [2]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



8. [Puntuación máxima: 7]

(a) Muestre que  $\frac{\operatorname{sen} x \tan x}{1 - \cos x} \equiv 1 + \frac{1}{\cos x}$ ,  $x \neq 2n\pi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . [3]

(b) A partir de lo anterior, determine el intervalo de valores de  $k$  para los cuales  $\frac{\operatorname{sen} x \tan x}{1 - \cos x} = k$  no tiene ninguna solución real. [4]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



16EP11

**Véase al dorso**

9. [Puntuación máxima: 8]

Utilizando la sustitución  $x = \tan u$ , halle el valor de  $\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^3} dx$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



16EP12

No escriba soluciones en esta página.

### Sección B

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta.

10. [Puntuación máxima: 20]

Considere la función  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ , donde  $x \in \mathbb{R}$  y  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ .

- (a) (i) Escriba una expresión para  $f'(x)$ .
- (ii) A partir de lo anterior, y sabiendo que  $f^{-1}$  no existe, muestre que  $b^2 - 3ac > 0$ . [4]
- (b) Considere la función  $g(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 6x - 8$ , donde  $x \in \mathbb{R}$ .
- (i) Muestre que  $g^{-1}$  existe.
- (ii)  $g(x)$  se puede escribir en la forma  $p(x-2)^3 + q$ , donde  $p, q \in \mathbb{R}$ . Halle el valor de  $p$  y el valor de  $q$ .
- (iii) A partir de lo anterior, halle  $g^{-1}(x)$ . [8]

El gráfico de  $y = g(x)$  se puede obtener transformando el gráfico de  $y = x^3$  mediante una secuencia de tres transformaciones.

- (c) Indique cada una de esas transformaciones en el mismo orden en el que se vayan a aplicar. [3]
- (d) Dibuje aproximadamente los gráficos de  $y = g(x)$  e  $y = g^{-1}(x)$  en los mismos ejes de coordenadas, indicando los puntos de corte de cada gráfico con los ejes. [5]

11. [Puntuación máxima: 15]

Considere la curva  $C$  que viene dada por  $y^2 = \sin(xy)$ ,  $y \neq 0$ .

- (a) Muestre que  $\frac{dy}{dx} = \frac{y \cos(xy)}{2y - x \cos(xy)}$ . [5]
- (b) Demuestre que cuando  $\frac{dy}{dx} = 0$ ,  $y = \pm 1$ . [5]
- (c) A partir de lo anterior, halle las coordenadas de todos los puntos de  $C$  donde  $\frac{dy}{dx} = 0$ , para  $0 < x < 4\pi$ . [5]



16EP13

Véase al dorso

No escriba soluciones en esta página.

12. [Puntuación máxima: 15]

Considere la función  $f(x) = \frac{kx-5}{x-k}$ , donde  $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\}$  y  $k^2 \neq 5$ .

- (a) Indique la ecuación de la asíntota vertical en el gráfico de  $y = f(x)$ . [1]
- (b) Indique la ecuación de la asíntota horizontal en el gráfico de  $y = f(x)$ . [1]
- (c) Utilice un método algebraico para determinar si  $f$  coincide con su inversa. [4]

Considere el caso en el que  $k = 3$ .

- (d) Dibuje aproximadamente el gráfico de  $y = f(x)$ , indicando claramente las ecuaciones de todas las asíntotas que haya y las coordenadas de todos los puntos de corte con los ejes de coordenadas. [3]
- (e) La región delimitada por el eje  $x$ , la curva  $y = f(x)$  y las rectas  $x = 5$  y  $x = 7$  se rota  $2\pi$  radianes alrededor del eje  $x$ . Halle el volumen del sólido así generado; dé la respuesta en la forma  $\pi(a + b \ln 2)$ , donde  $a, b \in \mathbb{Z}$ . [6]



**No** escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.



16EP15



**No** escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.



16EP16